

## Penginvestigasian Objek Fungsi Sebagai Hasil Pengkapsulan Proses: Suatu Studi Kasus Untuk NURI

**Sudirman**

*Department of Mathematics  
State University of Malang  
e-mail : [sudirman\\_um@yahoo.co.id](mailto:sudirman_um@yahoo.co.id)*

### Abstrak

Piaget, Dienes, Davis, Greeno, Dubinsky, Sfard, Gray & Tall memberikan perhatian yang sangat besar terhadap transisi dalam berpikir matematis dari proses ke objek. Piaget banyak bekerja untuk matematika elementer, sedangkan Dubinsky dan Sfard banyak bekerja untuk matematika yang lebih *advance*. Sfard mengusulkan dua pendekatan untuk pemerolehan dan pengembangan konsep, yang satu *operasional* yang berfokus pada proses, dan lainnya *struktural*, yang berfokus pada objek. Istilah yang diperkenalkan oleh Sfard ini secara berturut-turut adalah sama dengan yang diperkenalkan Piaget, yaitu abstraksi empiris dan abstraksi pseudo-empiris. Dubinsky menyatakan bahwa tindakan (*action*) akan menjadi proses (*process*) ketika individu dapat menggambarkan atau merenungkan semua langkah dalam transformasi tanpa harus melakukan . Proses akan menjadi objek ketika individu menjadi sadar akan totalitas proses. Tall mengusulkan teori prosep, yang mempertimbangkan proses, konsep dan simbol. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana individu mempertimbang- kan beberapa prosedur untuk proses yang sama dalam membangun konsep fungsi sebagai objek mental dan untuk mengetahui bagaimana individu mempertimbangkan konsep fungsi sebagai objek mental yang dihasilkan melalui pengkapsulan proses

**Kata kunci:** prosedur, proses, konsep, prosep, objek

### I. PENDAHULUAN

Makalah ini disusun sebagai studi pendahuluan terhadap disertasi saya “Profil Berpikir Mahasiswa dalam Membangun Pengetahuan Konsep Fungsi” . Melalui penelitian ini, saya ingin memberikan gambaran bagaimana proses berpikir subjek penelitian dalam membangun pengetahuan konsep fungsi. Tujuannya adalah untuk mengetahui bagaimana individu mempertimbangkan beberapa prosedur untuk proses yang sama dalam membangun konsep fungsi sebagai objek mental dan untuk mengetahui bagaimana individu mempertimbangkan konsep fungsi sebagai objek mental yang dihasilkan melalui pengkapsulan proses. Pemilihan konsep ini sebagai materi penelitian saya dilatarbelakangi oleh hasil-hasil penelitian sebelumnya yang menyatakan bahwa konsep fungsi adalah konsep yang sangat penting dalam matematika (DeMarois, P. & Tall, D. 1996; Ibrahim Bayazit, et al, 2010 ). Namun demikian, meskipun konsep fungsi dipandang sangat penting, masih banyak persoalan yang dihadapi oleh peserta didik. Mereka masih kesulitan dalam memahami konsep fungsi

(Ibrahim Bayazit, et al, 2010). Pertanyaan penelitian dalam penelitian ini adalah: (1) bagaimana individu mempertimbangkan beberapa prosedur untuk proses yang sama dalam membangun konsep fungsi sebagai objek mental dan (2) bagaimana individu mempertimbangkan konsep fungsi sebagai objek mental yang dihasilkan melalui pengkapsulan proses. Kerangka teori yang akan digunakan adalah teori tiga dunia matematika dan teori proses-objek

## II. METODE PENELITIAN

Pada semester genap 2010/2011 saya mengampu matakuliah teori bilangan. Matakuliah ini disajikan kepada mahasiswa pada semester II. Ada 38 mahasiswa sebagai peserta matakuliah ini. Mereka sebagian besar adalah mahasiswa angkatan 2010/2011. Pemilihan kelas ini sebagai studi pendahuluan dalam penyusunan disertasi saya, didasarkan pada isi dari matakuliah tersebut yang salah satu diantaranya membahas tentang fungsi multiplikatif. Pada saat perkuliahan masuk pada materi fungsi multiplikatif, saya memberikan lembar kerja kepada 38 mahasiswa untuk diselesaikan. Lembar kerja yang dimaksud terdiri dari 8 soal yang semuanya berhubungan dengan fungsi. Setelah selesai mengerjakan, saya mengumpulkan hasil pekerjaan dan selanjutnya mengoreksi pekerjaan mereka. Dari hasil yang saya koreksi, saya menetapkan salah satu mahasiswa, yaitu “Nuri” yang dalam makalah ini sebagai subjek penelitian. Dalam perkuliahan sehari-hari dengan saya, mahasiswa ini cukup aktif meskipun kemampuannya tidak begitu istimewa. Sebelum memberikan lembar kerja kepada mahasiswa, saya tidak melakukan kegiatan perkuliahan yang berhubungan dengan materi fungsi. Namun demikian, tidak berarti yang bersangkutan tidak memiliki informasi sama sekali tentang fungsi, karena secara formal sejak kelas VIII (kelas 2 SMP) dia sudah mempelajari konsep fungsi. Di samping itu, setiap mempelajari topik-topik dalam matematika, dia juga selalu bersinggungan dengan konsep fungsi.

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kualitatif. Sedangkan data diperoleh dari wawancara berbasis tugas. Wawancara saya lakukan terhadap mahasiswa yang dalam makalah ini saya sebut “Nuri”.

Dalam penelitian ini ada 8 nomor soal yang dikerjakan oleh 38 mahasiswa. Mahasiswa-mahasiswa ini adalah peserta matakuliah teori bilangan yang saya ampu. Soal nomor 1 dan 2 dalam lembar tugas dimaksudkan untuk mengungkap bagaimana

mahasiswa mengaitkan antara 2 himpunan yang diberikan (dalam konteks membahas konsep fungsi). Soal nomor 3 dan 5 dimaksudkan untuk mengungkap bagaimana kesadaran mahasiswa terhadap keberadaan himpunan pertama dan himpunan kedua dan bagaimana menamakan pengaitan yang dikenakan terhadap dua himpunan tersebut. Soal nomor 4 dan 6 dimaksudkan untuk mengungkap apakah ada pengaitan yang dapat dibuat (dalam konteks konsep fungsi). Soal nomor 7 dimaksudkan untuk mengungkap bagaimana kesadaran mahasiswa terhadap keberadaan himpunan pertama dan himpunan kedua dan dapat menetapkan apakah ada pengaitan yang dapat dibuat (dalam konteks konsep fungsi) terhadap semua gambar yang diberikan. Soal nomor 8 dimaksudkan untuk mengungkap bagaimana kesadaran mahasiswa terhadap keberadaan himpunan yang pertama dan kedua dan dapat menetapkan nama pengaitan yang dibuat. Hasil-hasil yang diperoleh dari pertanyaan soal nomor 1 dan 2 digunakan untuk menjawab pertanyaan penelitian yang pertama, yaitu: bagaimana individu mempertimbangkan beberapa prosedur untuk proses yang sama dalam membangun konsep fungsi sebagai objek mental. Sedangkan hasil-hasil yang diperoleh dari pertanyaan 3 sampai 8 digunakan untuk menjawab pertanyaan penelitian yang kedua, yaitu: bagaimana individu mempertimbangkan konsep fungsi sebagai objek mental yang dihasilkan melalui pengkapsulan proses.

### III. HASIL PENELITIAN

Menggunakan kerangka teori yang telah diuraikan, penelitian ini fokus pada suatu topik dalam matematika, yaitu konsep fungsi. Hal yang menjadi perhatian adalah perkembangan dari proses ke objek dari subjek penelitian. Apakah subjek penelitian berpikir tentang fungsi secara operasional sebagai proses, atau secara struktural sebagai objek. Penggunaan gerak isyarat juga dimungkinkan atau diperbolehkan.

Oleh karena itu, berikut ini ditampilkan beberapa contoh hasil pengerjaan lembar tugas yang telah diberikan. Ketika diberikan dua himpunan yang anggota-anggotanya adalah nama-nama negara dan ibu kotanya, tidak ada masalah bagi Nuri untuk membuat hubungan antara keduanya (dengan anak panah), termasuk dalam memberi nama atau menetapkan hubungan. Akan tetapi Nuri butuh waktu untuk berpikir, ketika dia diminta membuat hubungan-hubungan yang lain, yang berbeda

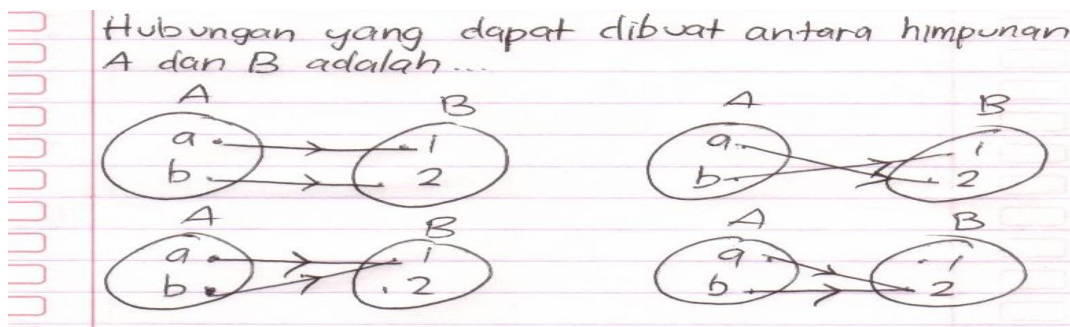
dengan hubungan yang sudah ditetapkan. Dalam konteks dua himpunan yang diberikan, Nuri hanya dapat menetapkan 1 nama hubungan. Dari hasil wawancara, dia mengatakan bahwa hanya ada 1 hubungan yang dapat ditetapkan untuk dua himpunan tersebut (dari himpunan A ke B), yaitu “ibu kotanya”. Lebih lanjut dia menjelaskan dengan kalimat sebagai berikut: Indonesia ibu kotanya Jakarta, dan Malaysia ibu kotanya Kuala Lumpur.

Selanjutnya, saya mengubah anggota himpunan A dengan “segitiga” dan “persegi panjang” dan himpunan B anggotanya adalah “lingkaran” dan Elips”. Seperti sebelumnya, saya meminta Nuri untuk membuat hubungan antara keduanya (dengan anak panah). Untuk dua himpunan itu, Nuri merasa kesulitan membuat hubungan antara keduanya, bahkan dia tidak membuat hubungan antara keduanya.

Setelah melewati dua hal di atas, saya minta Nuri mengingat tentang konsep fungsi yang secara formal sudah pernah dipelajari (sejak di SMP kelas 2). Saya memintanya menyampaikan pendapat “apa yang diketahui tentang fungsi”. Dengan cepat, Nuri menyatakan baik secara tulisan maupun lisan bahwa “fungsi adalah aturan yang menghubungkan setiap anggota di *domain* dengan anggota di *kodomain*”. Oleh karena itu, saya kembali lagi ke pertanyaan pertama dan kedua, yaitu himpunan-himpunan yang anggota-anggotanya adalah nama-nama negara dan ibu kotanya dan himpunan –himpunan yang anggota-anggotanya adalah “segitiga” dan “persegi panjang” serta “lingkaran” dan “elips”. Saya tanyakan lagi kepada Nuri, “jika saudara berbicara tentang fungsi, buatlah hubungan antara himpunan A dan B”. Jawaban yang diberikan Nuri terhadap pertanyaan yang pertama, tetap yaitu “ibu kotanya”, tetapi sepertinya mempunyai konflik dalam pikirannya ketika diminta membuat hubungan yang lain. Ada beberapa gerak isyarat yang diberikan disertai mimik yang berbicara kepada dirinya sendiri, tetapi tetap ragu untuk menuliskan dan mengatakan. Oleh karena itu saya, saya menegaskan kembali pertanyaan “adakah hubungan lain yang dapat saudara buat atau tetapkan?”. Terhadap pertanyaan itu, dia hanya menggelengkan kepalanya. Kejadian yang sama terjadi untuk pertanyaan yang kedua. Bahkan untuk pertanyaan ini konflik yang terjadi dalam pikirannya bertambah besar. Nuri cukup lama diam, meskipun ada gerak isyarat dan mimik yang tampak, tetapi tetap saja tidak jelas apa yang akan disampaikan.

Pada pertanyaan ketiga, saya memberikan kepadanya dua himpunan yang

anggota-anggotanya adalah  $a$  dan  $b$  untuk himpunan  $A$  serta 1 dan 2 untuk himpunan  $B$ . Saya meminta dia membuat hubungan antara himpunan  $A$  dan  $B$ . Untuk kasus pertanyaan ketiga ini, ada fakta yang sangat menarik yang diperoleh. Nuri begitu cepat membuat hubungan-hubungan antara himpunan  $A$  dan  $B$ . Berikut ini adalah pekerjaan yang dituliskan oleh Nuri.

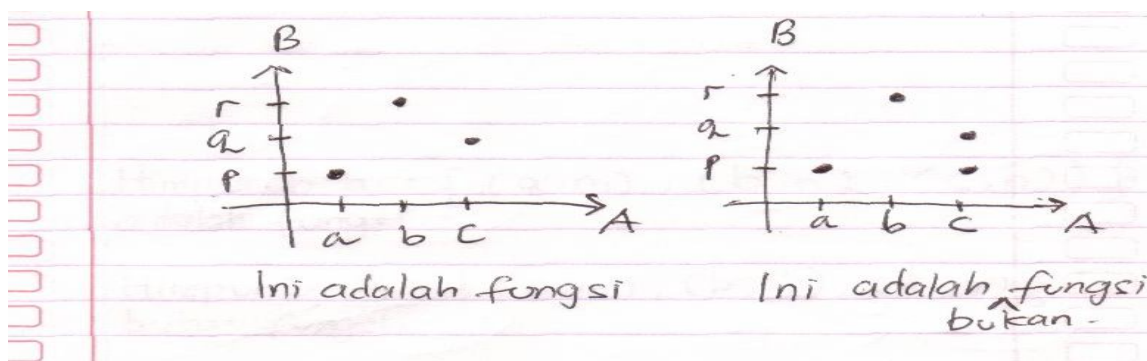


Namun demikian, ketika ditanyakan apa “nama hubungan” yang dia berikan atau tetapkan terhadap masing-masing gambar yang dibuat, Nuri tidak dapat menjelaskan. Dia hanya memberikan isyarat dengan tangannya (membentuk tanda  $=$  dan  $>$ ) untuk menjelaskan kepada saya bahwa jika berbicara fungsi “panahnya harus berbentuk demikian”.

Untuk pertanyaan keempat, lima, dan enam yang berhubungan dengan fungsi yang dinyatakan sebagai pasangan berurutan atau dalam bentuk grafik (banyak anggotanya hingga), Nuri juga begitu cepat dalam memberi jawaban, yang mana pasangan berurutan yang membentuk fungsi. Dia seperti berbicara dengan dirinya sendiri sambil menggunakan isyarat dengan tangannya (seperti membentuk tanda  $=$  dan  $>$ ). Berikut ini adalah pekerjaan yang dituliskan oleh Nuri.

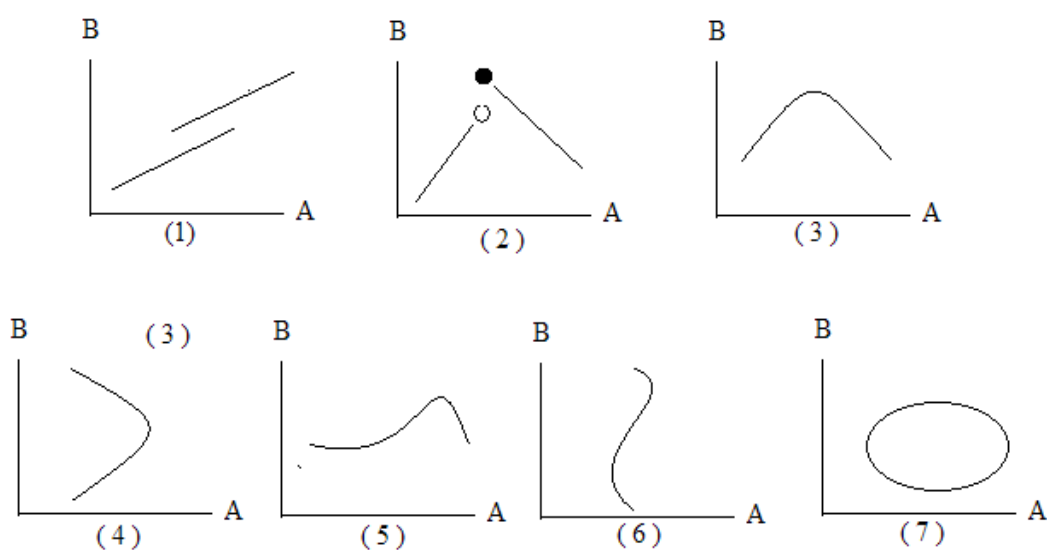
Himpunan  $A = \{(a, m), (b, n), (c, n)\}$  adalah fungsi.

Himpunan  $B = \{(a, m), (b, n), (a, n)\}$  bukan fungsi.



Seperti sebelumnya, ketika ditanyakan apa “nama hubungan” yang dia berikan atau tetapkan terhadap masing-masing gambar yang dibuat, Nuri tidak dapat menjelaskan. Dia hanya memberikan isyarat dengan tangannya (membentuk tanda  $=$  dan  $>$ ) untuk menjelaskan kepada saya bahwa jika berbicara fungsi “panahnya harus berbentuk demikian”.

Untuk pertanyaan ketujuh yang berhubungan dengan fungsi yang dinyatakan dalam bentuk grafik (A dan B adalah himpunan bilangan real) ada fakta menarik yang saya temui, dimana gerak isyarat tangan yang biasa dia lakukan tidak lagi mendominasi dalam membuat keputusan. Dia seperti mengalami konflik dalam pikirannya. Hal ini terlihat dari jawaban yang diberikan terkait dengan pertanyaan yang dihadapi, yaitu: Perhatikan semua gambar berikut. Nyatakan, yang mana yang menyatakan grafik fungsi dan yang mana yang bukan. Berikan alasan terhadap jawaban yang saudara sebutkan.



Nuri menyatakan bahwa grafik (1) dan (2) bukan grafik fungsi dengan alasan grafiknya



putus (tidak sambung). Sedangkan grafik (3), (4), (5), (6), dan (7) masing-masing menyatakan grafik fungsi, karena grafiknya tidak putus. Dari caranya menyampaikan saat wawancara, dia sendiri tidak begitu yakin dengan jawabannya.

Untuk pertanyaan kedelapan yang berhubungan dengan fungsi yang dinyatakan dalam bentuk rumus, yaitu  $f(x) = x^2 - 5$  untuk semua  $x \in R$ , Nuri menyatakan bahwa rumus yang diberikan menyatakan fungsi. Alasannya adalah, jika  $x$  diganti dengan bilangan berapapun, maka  $x^2 - 5$  pasti dapat dihitung. Sebagai contoh, dia mengatakan, jika  $x = 1$ , maka  $x^2 - 5 = -4$ .

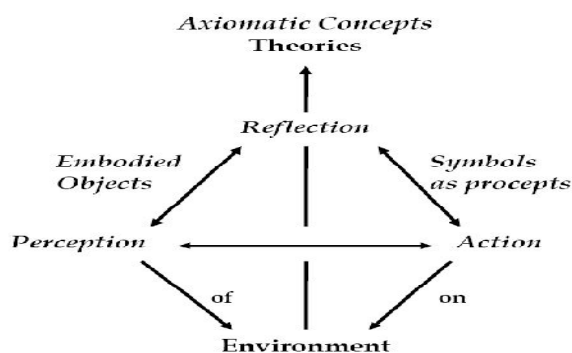
#### IV. DISKUSI

Seperti yang sudah disebutkan pada bagian pendahuluan, bahwa kerangka teori yang akan digunakan adalah teori tiga dunia matematika dan teori proses-objek. Teori tiga dunia matematika adalah teori perkembangan kognitif yang dikembangkan oleh David Tall, sedangkan teori proses-objek adalah teori yang menyatakan bahwa ciri penting dari berpikir matematis adalah bahwa konsep-konsep matematika dapat dipandang sebagai proses atau sebagai objek. Karena saya memandang bahwa mahasiswa pada semester II masih dalam masa transisi dalam berpikir dari matematika sekolah ke matematika formal di perguruan tinggi, maka saya juga memasukkan kajian tentang aktifitas perseptual dalam matematika.

Teori tiga dunia matematika yang dikembangkan David Tall dapat dipahami dalam dua cara. Pertama, menggambarkan perjalanan peserta didik dalam matematika longitudinal (perjalanan melalui geometri, aritmatika, aljabar, kalkulus, dan analisis) ketika mereka bekerja di dunia perwujudan dan di simbolik, dan beberapa dari mereka bahkan terus melanjutkan ke dunia formal. Kedua, teori juga dapat fokus pada konsep tertentu dan menggambarkan bagaimana peserta didik melakukan perjalanan melalui dunia yang berbeda ketika membangun konsep itu. Sedangkan teori proses objek adalah suatu teori yang berfokus pada ide proses menjadi objek mental. Oleh karena itu, konsep-konsep matematika dapat dipandang sebagai proses atau sebagai objek.

Ada dua cara bagaimana perolehan konsep dimulai dalam belajar matematika. Pertama adalah dengan melakukan tindakan simbolik pada objek dan dari tindakan ini dimaksudkan untuk membangun konsep baru. Dalam teori APOS, suatu tindakan diinteriorisasi sebagai suatu proses yang selanjutnya dikapsulkan sebagai objek (Asiala

& al 1996; Dubinsky, 1994). Demikian pula, dalam teori reifikasi dari Sfard (1991), seseorang mereifikasi pengerjaan (*operation*) ke suatu entitas statis, yang berarti pergeseran dari konsepsi operasional (berfokus pada proses) ke struktural (berfokus pada objek). Kedua, menurut Gray dan Tall (2001), perolehan konsep dimulai dari persepsi dan bertindak terhadap objek. Gray dan Tall menyebut jenis objek yang dilihat atau dirasakan sebagai suatu objek perwujudan. Objek perwujudan adalah konstruksi mental dari realitas yang dirasakan atau dilihat, dan melalui refleksi dapat menjadi konstruksi yang lebih abstrak, yang tidak lagi mengacu pada objek tertentu di dunia nyata.



Gambar 1. Macam-macam entitas mental yang berbeda yang muncul melalui persepsi, aksi atau tindakan dan refleksi

David Tall (2008e) mengembangkan lebih lanjut ide-idenya ke dalam teori perkembangan yang diberi nama teori tiga dunia matematika. Masing-masing dunia memiliki karakteristik sendiri untuk perkembangan kecanggihan dan garansi sendiri untuk kebenaran. Ketiga dunia matematika dari David Tall adalah sebagai berikut. Dunia perwujudan (konseptual) terdiri dari berpikir tentang hal-hal yang dapat dirasakan dan dipahami dalam dunia fisik dan mental. Jaminan kebenaran dalam dunia perwujudan didasarkan pada eksperimen pemikiran dan pada "melihat" hal yang harus benar. Dunia simbolik (proceptual) terdiri dari penggunaan simbol untuk perhitungan dan untuk berpikir tentang konsep. Simbol bertindak baik sebagai proses dan sebagai konsep, dan seseorang secara fleksibel dapat berpindah antara keduanya. Dunia formal (aksiomatik) didasarkan pada aksioma, definisi, teorema dan penalaran deduktif. Dalam dunia formal, sesuatu adalah benar jika sesuatu adalah aksioma, definisi atau teorema yang kebenarannya dapat dibuktikan secara formal.

Dari perspektif teori proses-objek, ciri penting dari berpikir matematis adalah



bahwa konsep-konsep matematika dapat dipandang sebagai proses atau sebagai objek (Sfard, 1991; Asiala & al, 1996; Gray & Tall, 2001). Teori APOS (Asiala & al., 1996), didasarkan pada asumsi bahwa konsepsi proses mendahului konsepsi objek. Sejalan dengan teori tersebut, teori reifikasi dari Sfard (1991) menyatakan bahwa beberapa konsep matematika pertama kali dipahami sebagai proses dan setelah itu sebagai objek. Menurut teori reifikasi (Sfard, 1991; Sfard, 1992; Sfard & Linchevsky, 1994), belajar berjalan melalui tiga tahap. Pada tahap pertama, pembelajar menginteriorisasi proses yang dilakukan pada objek yang sudah ada. Pembelajar menjadi terampil dalam melakukan proses dan dapat mempertimbangkan atau memikirkan proses tanpa benar-benar melakukannya. Pada tahap kedua, barisan-barisan dari pengerjaan atau operasi dikondensasi/ dikristalkan ke dalam unit-unit yang lebih dapat dikelola. Seseorang menjadi lebih mampu berpikir tentang proses sebagai keseluruhan dan tidak perlu masuk ke rincian. Proses dipertimbangkan sebagai hubungan input-output dari pada sebagai operasi. Pada tahap ketiga, entitas matematis direifikasi. Ini berarti bahwa gagasan itu dipahami atau dibayangkan sebagai objek dan terlepas dari proses yang menghasilkannya. Objek tersebut memperoleh maknanya dari menjadi anggota suatu kategori bukan dari proses. Pada tahap ini proses dapat dilakukan pada objek baru.

Dalam teori APOS yang dikembangkan oleh Dubinsky et al. (Asiala & al, 1997; Asiala & al, 1996; Breidenbach & al, 1992; Dubinsky & McDonald, 2001; Dubinsky, 1991; Dubinsky, 1994; DeVries, 2001), ada tahapan serupa, yaitu Aksi, Proses, Objek dan Skema. Tindakan atau aksi adalah transformasi objek secara fisik atau mental untuk mendapatkan objek lain. Tindakan ini merupakan reaksi terhadap rangsangan eksternal dan itu dilakukan langkah demi langkah tanpa kendali kesadaran individu terhadap tindakan. Ketika individu merefleksikan tindakan dan mendapatkan kontrol sadar darinya, tindakan ini diinteriorisasikan ke proses dan individu dapat menjelaskan langkah-langkah dalam transformasi tanpa harus melakukannya. Suatu proses menjadi dikapsulkan sebagai objek ketika individu menjadi sadar pada keseluruhan proses dan mampu melakukan tindakan baru atasnya. Skema adalah koleksi koheren (saling terkait) dari proses, objek, dan skema yang lain. Suatu objek dapat juga dibuat ketika skema ditematisasikan ke objek.

Contoh tahapan dalam konsep matematika *advance* dapat ditemukan dalam literatur yang disebutkan pada teori APOS. Untuk kasus konsep fungsi, Asiala et al.

(1996), Breidenbach et al. (1992), Dubinsky dan McDonald (2001) dan DeVries (2001) memberikan contoh berikut. Seorang pebelajar memiliki konsepsi tindakan jika ia terbatas pada perhitungan nilai dari suatu fungsi dengan formula yang diberikan. Seseorang adalah pada tingkat proses jika dia berpikir tentang fungsi sebagai mesin input-output. Pada tingkat objek seorang pebelajar mampu melakukan tindakan pada fungsi. Berdasarkan literatur yang ada, tiga tahapan pertama dalam teori APOS sesuai dengan tahapan dalam teori Sfrad's. Bagaimanapun, hal umum yang paling penting adalah perkembangan dari proses ke objek.

Namun demikian, Tall (1999) telah mengkritisi teori APOS karena menurutnya, belajar tidak selalu berjalan sesuai dengan tingkatan APOS. Oleh karena itu, Tall (2005) memasukkan dunia perwujudan ke teori yang dikembangkannya, yaitu tiga dunia matematika, di mana persepsi memiliki peran penting.

Belajar di dunia simbolik terjadi dengan membangun objek dari tindakan. Namun, dalam dunia perwujudan, tidak berarti menggambarkan perkembangan dalam cara yang sama. Gray dan Tall (2001) menyatakan bahwa dalam kegiatan pembelajaran mungkin juga memulai dengan mengamati konsep yang akan dipelajari sebagai objek. Dengan cara ini pebelajar membangun konsep dengan melakukan tindakan atasnya. Ini berarti bahwa sebelum mengkapsulkan objek dari proses, konsep tersebut sudah ada sebagai objek perwujudan. Mereka mengusulkan bahwa persepsi bisa menjadi membangun yang lebih abstrak, yang tidak lagi mengacu pada objek tertentu di dunia nyata. Menurut Gray dan Tall (2001), jenis perkembangan ini adalah sama dengan perkembangan yang digambarkan oleh van Hiele dalam geometri. Jenis perkembangan ini diasumsikan terjadi di dunia perwujudan melalui refleksi dan penggunaan bahasa (Tall, 2004a). Menurut Tall (2004a), ini sama sekali berbeda dengan perkembangan di dunia simbolik.

Kemudian, Tall mengembangkan deskripsi pembelajaran di dunia perwujudan sehingga memiliki kesamaan dengan perkembangan di dunia simbolik (Tall, 2005; Pegg & Tall, 2005). Deskripsi pembelajaran yang dikembangkan diinspirasi dari seorang pebelajar yang melihat bahwa satu translasi dikombinasikan dengan yang lain memiliki efek yang sama sebagai translasi tunggal sesuai dengan jumlah dua vektor (Tall, 2005). Dengan demikian, di dunia perwujudan, pebelajar dapat belajar dengan mengalihkan fokus mereka dari tindakan ke efek yang timbul dari tindakan (Tall, 2005; Pegg & Tall,

---

2005).

Hähkiöniemi, M. (2006) memberikan pandangan bahwa perkembangan efek tindakan di dunia perwujudan sebagai konsep transparansi. Transparansi terhadap alat berarti bahwa alat dapat dilihat untuk memperoleh informasi rinci tentang alat, tapi tidak terlihat untuk mendapatkan akses ke sebuah fenomena yang dapat dilihat melalui alat (Meira, 1998; Roth, 2003; Lave & Wenger, 1991). Transparansi bukanlah sifat alat tetapi hubungan yang muncul antara pengguna dan alat (Meira, 1998; Roth, 2003). Menurut pandangan ini, alat tidak berarti hanya alat fisik, tetapi juga non-fisik. Oleh karena itu, dalam kegiatan pembelajaran, representasi konsep dipandang sebagai alat.

Memberikan gerak isyarat memiliki peran yang sangat penting dalam dunia perwujudan. Hähkiöniemi, M. (2006) menyatakan bahwa memberikan gerak isyarat dapat dipandang sebagai representasi suatu konsep. Selain itu, McNeill (1992) berpendapat bahwa memberikan gerak isyarat bersama-sama dengan memberikan penjelasan merupakan bagian penting dari proses berpikir. Roth dan Welzel (2001) telah menunjukkan dengan studi kasus mereka bahwa gerak isyarat memiliki peran penting dalam membangun penjelasan secara fisik. Mereka berpendapat bahwa gerak isyarat memungkinkan membangun penjelasan yang kompleks bahkan dalam ketiadaan bahasa ilmiah. Menurut penelitian mereka, gerak isyarat tampaknya membuat entitas abstrak seperti terlihat. Demikian pula, Radford et al. (2003) melaporkan bahwa gerak isyarat dengan kata-kata memungkinkan pebelajar memahami grafik jarak-waktu benda bergerak. Juga, penelitian Moschkovich (1996) menyoroti pentingnya gerak isyarat, terutama saat menjelaskan objek secara grafis. Rasmussen et al. (2004) menggambarkan dalam penelitian mereka bagaimana gerak isyarat merupakan bagian dari pengekspresian, berkomunikasi dan reorganisasi pikiran pebelajar.

## V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil-hasil yang diperoleh dalam penelitian ini dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut. (1) Ditinjau dari konteks teori proses objek (teori APOS, reifikasi, dan Prosep), dalam memaknai kata “hubungan” yang dia sebut “aturan” , subjek penelitian masih sangat bergantung kepada konteks dunia nyata, meskipun sudah disampaikan bahwa pembahasan yang dilakukan pada saat itu adalah dalam konteks

fungsi. Hal ini ditunjukkan oleh jawaban baik secara tulisan maupun lisan terhadap tugas yang dikerjakan, dimana dia dapat “menghubungkan” dan memberi “nama hubungan”, jika secara nyata, 2 himpunan yang diberikan memang dapat dihubungkan. Seperti kota dan ibu kotanya. Dampaknya adalah dia tidak bisa “menghubungkan” dan memberi “nama hubungan” 2 himpunan, apabila menurutnya tidak bermakna. (2). Fakta di atas berbeda sama sekali ketika subjek penelitian diberi 2 himpunan yang anggota-anggotanya adalah huruf atau bilangan yang biasa dia temui dalam perjalanan sebagai pebelajar. Dalam konteks fungsi, ketika saya memintanya menghubungkan dan memberi nama hubungan antara keduanya, dengan cepat dia menghubungkan dengan menggunakan anak panah, tetapi tidak memberi nama hubungan. (3). Berdasarkan penelitian ini terlihat bahwa subjek penelitian masih sangat terbatas dalam mempertimbangkan prosedur untuk proses yang sama dalam membangun konsep fungsi, dan juga belum sepenuhnya terjadi pengkapsulan proses dalam rangka membangun konsep fungsi.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Asiala, M et al, (1996) . *A framework for research and curriculum development in Undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education II. Issues in Mathematics Education (CBMS), American Mathematical Society, 1-32.
- Asiala, M. et al, (1997). *The development of students' graphical understanding of the derivative*. Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399-431.
- Breidenbach, D et al. (1992). *Development of the process conception of function*. Educational Studies in Mathematics, 23(3), 247-285.
- David Tall et al. (1996). *What is the object of the encapsulation of a process?. Dedicated to the memory of Robert B. Davis†*
- David, Tall. (1999). *Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking*. In O. Zaslavsky (Ed.) Proceedings of the 23<sup>rd</sup> conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME), Haifa, Israel, Vol. 1, 111-118.
- David Tall (2004a). *Introducing Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics*, 23 (3). 29–33.
- David Tall (2005e) *A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof*. Plenary Lecture for the *International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, Belgium, 5-7 July, 2005.

- 
- David Tall (2008e). *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2), 5-24 [A summary of the framework of three worlds of mathematics as applied to the shift to formal thinking].
- DeMarois, P. & Tall, D. (1996), *Facets and Layers of the Function Concept*. Published in *Proceedings of PME 20*, Valencia, (1996), vol. 2, pp. 297–304.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, NL: Kluwer, 95-123.
- Dubinsky, E. (1994). *A theory and practice of learning college mathematics*. In A. Schoenfeld (Ed.) *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 221-243.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. In D. Holton & al. (Eds.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*. Dordrecht, NL: Kluwer, 273-280.
- Gray, E. & Tall, D. (2001). *Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics*. In M. van den Heuval-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME)*, Vol. 3, Utrecht, 65-72.
- Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. University of Jyväskylä. Department of Mathematics and Statistics. Report 104.
- Ibrahim Bayazit et al. (2010). *Geogebra As An Instructional Tool to Promote Students' Operational and Structural Conception of Function*. Ithaca College, Ithaca, NY, USA
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind. What gestures reveal about thought*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Meira, L. (1998). *Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121-142.
- Moschkovich, J. (1996). *Moving up and getting steeper: negotiating shared descriptions of linear graphs*. *The Journal of the Learning Sciences*, 5(3), 239- 277.
- Pegg, J. & Tall, D. (2005). *The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks*. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)*, 37(6), 468-475.
- Radford, L. et al., (2003). *Calculators, graphs, gestures and the production of meaning*. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th conference of the international group for the Psychology of mathematics education*
-

---

(PME), Honolulu, Vol. 4, 55-62.

Rasmussen, C. et al., (2004) . *Classroom mathematical practices and gesturing*. Journal of Mathematical Behavior, 23(3), 301-323

Roth, W-M. (2003). *Competent workplace mathematics: How signs become transparent in use*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8(2), 161-189.

Roth, W-M. & Welzel, M. (2001). *From activity to gestures and scientific language*. Journal of Research in Science Teaching, 38(1), 103-136.